

APLICACIONES DE LA TEORÍA DE GRAFOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE TRANSMISIÓN DEL RUIDO Y VIBRACIONES EN MODELOS DE ANÁLISIS ESTADÍSTICO ENERGÉTICO

Oriol Guasch¹, Àngels Aragonès¹

¹ GTM - Grup de Recerca en Tecnologies Mèdia, La Salle, Universitat Ramon Llull, C/ Quatre Camins 2, 08022 Barcelona, Catalonia (Spain)
oguasch@salle.url.edu angelsa@salle.url.edu

Resumen

El estudio del comportamiento vibroacústico de maquinaria requiere tanto de medidas experimentales como de simulación numérica. Para altas frecuencias, ésta última suele realizarse mediante el análisis estadístico energético (SEA). Un problema típico a resolver es el de determinar y clasificar las vías de transmisión del ruido y vibraciones, entre fuentes y receptores. Recientemente, se ha propuesto una metodología basada en la teoría de grafos para abordar de forma eficiente esta cuestión. En este artículo presentaremos las bases para conectar el SEA con la teoría de grafos y veremos las posibilidades que ofrece la unión de estas disciplinas a priori totalmente dispares. Además, se revisaran los avances conseguidos hasta el momento y se mostraran distintos ejemplos para comprobar su utilidad.

Palabras clave: vías de transmisión (TPA), análisis estadístico energético (SEA), control ruido y vibraciones, teoría de grafos, algoritmos de clasificación.

PACS no 43.40.At, 43.50.Jh

1 Introducción

Hoy en día la simulación numérica se ha convertido en una herramienta imprescindible para el análisis vibroacústico de estructuras y maquinaria industrial. A bajas frecuencias se utilizan métodos deterministas, siendo probablemente el método de los elementos finitos (FEM) el más común, mientras que para altas frecuencias se recurre a métodos estadísticos como el análisis estadístico energético (SEA). Recientemente, se han desarrollado también los denominados métodos híbridos para el rango de frecuencias intermedias. Los modelos numéricos deben validarse siempre que sea posible mediante correlación con métodos experimentales.

Uno de los problemas característicos a abordar en vibroacústica consiste en determinar cuáles son las vías de transmisión del ruido y vibraciones entre aquellas partes de un sistema en las que se inyecta energía (e.g., los soportes de un motor) y aquellas que la reciben, y cuyo valor deseamos disminuir (e.g., el habitáculo de un automóvil). Desde un punto de vista experimental se han desarrollado distintas técnicas a tal efecto; son los denominados métodos de análisis de vías de transmisión (TPA: Transmission Path Analysis). Podemos citar los métodos clásicos basados en la medida de fuerzas operacionales (ver e.g., [1,2,3,4] entre muchos otros), los basados en el concepto de la transmisibilidad

directa [5,6,7], los métodos operacionales [8,9] y los híbridos entre los clásicos y los operacionales [10].

Por otra parte, pese a los grandes logros alcanzados en el campo de la simulación numérica, todavía existe la necesidad de desarrollar herramientas para su explotación. En otras palabras, es posible construir modelos que reproduzcan fidedignamente el comportamiento vibroacústico de una estructura, pero es necesario extraer información de ellos que sea útil para la resolución de problemas de control del ruido y vibraciones. En este trabajo repasaremos algunos avances realizados en este sentido. En particular, veremos cómo se puede usar la teoría de grafos para resolver algunos problemas de vías de transmisión en modelos SEA. La posibilidad de utilizar técnicas de la teoría de grafos como alternativa y/o complemento a las técnicas de optimización más tradicionales [11,12,13] fue sugerida por primera vez en [14]. Básicamente se plantearon dos cuestiones: la posibilidad de adaptar y desarrollar algoritmos para conseguir una clasificación computacionalmente eficiente de las vías de transmisión en modelos SEA (ver [15] para el caso de factores de pérdidas deterministas y [16] para el caso estocástico) y la posibilidad de utilizar algoritmos de corte en grafos para reducir la transmisión de energía entre fuentes y receptores [17].

Este artículo está organizado de la siguiente forma. En la segunda sección se establece la conexión entre la teoría de grafos y el SEA. En la tercera se expone el problema de clasificación de vías de transmisión, tanto para el caso determinista como para el estocástico, y se aplica al modelo SEA de un pequeño edificio para una mayor comprensión. En la cuarta sección se expone la técnica de partición de grafos y se aplica al mismo modelo de edificio usado anteriormente. Las conclusiones se presentan en la sección 5.

2 Conexión entre grafos SEA y modelos SEA

A grandes rasgos, el modelado de un sistema físico mediante SEA se divide en dos fases. En primer lugar, se definen los subsistemas. Un subsistema SEA corresponde a un conjunto de modos de vibración del sistema físico, agrupables por similitud. De tal forma que por ejemplo, si tenemos un modelo como el de la Figura 1a, a cada placa le podemos asociar tres subsistemas según el tipo de vibración: flexión, longitudinal o cizalla.

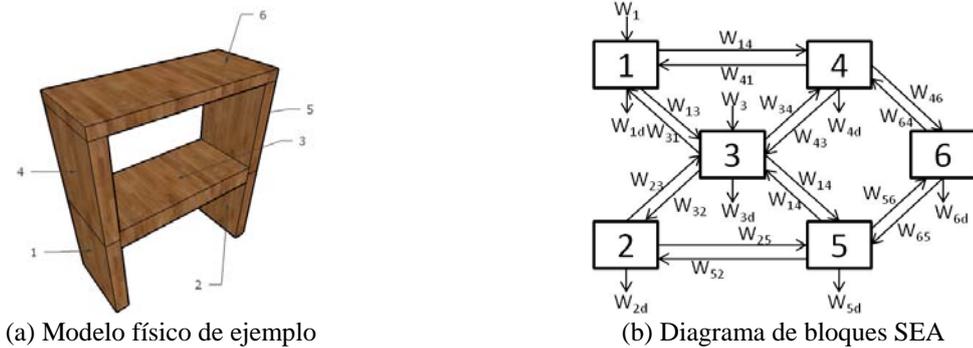


Figura 1 – Modelización SEA

En segundo lugar, se establecen los flujos de potencia entre dichos subsistemas que pueden representarse mediante un diagrama de bloques como el de la Figura 1b, correspondiente al modelo de la Figura 1a si solamente consideramos, por ejemplo, los modos de flexión (i.e., un subsistema por placa). Las ecuaciones de balance de potencia resultantes pueden agruparse en el siguiente sistema algebraico lineal

$$\mathcal{H}\mathbf{E} = \mathbf{E}^0, \quad (1)$$

donde \mathcal{H} es la matriz de factores de pérdidas, \mathbf{E} el vector que contiene las energías de cada subsistema y \mathbf{E}^0 el vector de energías externas inyectadas en cada subsistema. Existen tres tipos de factores de pérdidas, los factores de pérdidas por acoplamiento (CLF o η_{ij}), que indican la energía que se transmite en un ciclo del subsistema i al subsistema j y que aparecen con signo negativo fuera de la diagonal de \mathcal{H} ; los factores de pérdidas internas (ILF o η_{id}) que indican la energía perdida por disipación en cada subsistema y los factores de pérdidas totales (TLF o η_i) que engloban tanto las pérdidas por acoplamiento como las internas y que aparecen en la diagonal de \mathcal{H} . Resolviendo el sistema de ecuaciones de (1), se puede conocer el nivel de energía en cada subsistema, es decir, obtener el vector \mathbf{E} .

Existen numerosos métodos para resolver un sistema lineal como (1). En nuestro caso estaremos interesados en hacerlo mediante el desarrollo en serie de Neumann [18,14]

$$\mathbf{E} = (\mathcal{J} - \mathcal{S})^{-1}\mathbf{E}^0 = (\mathcal{J} + \mathcal{S} + \mathcal{S}^2 + \dots)\mathbf{E}^0, \quad (2)$$

donde \mathcal{J} es la matriz identidad y \mathcal{S} la matriz generatriz del desarrollo en serie. Sin embargo, para abordar problemas de ruido y vibraciones la solución \mathbf{E} al sistema (1) puede no bastar. En efecto, si echamos una ojeada a la Figura 2b podemos estar interesados en saber no solamente cuál es la energía total resultante en el subsistema 6, sino cuánta de ella se ha transmitido des de la fuente 1 a través del subsistema 4, o por la vía 1-3-5-6, etc. Conocer este tipo de información nos puede ayudar a determinar las modificaciones pertinentes para disminuir el nivel de energía en 6. Como veremos a continuación, la teoría de grafos nos puede resultar muy útil a tal efecto.

Visualmente, el diagrama de la Figura 1b presenta gran similitud con un grafo. Así pues, no parece descabellado intentar definir un grafo SEA que represente lo más fielmente posible el comportamiento de un modelo SEA. Formalmente, un grafo $G = (U; E)$ es una estructura matemática que consiste en un conjunto finito $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, cuyos elementos se denominan nodos, y un subconjunto E del producto cartesiano $U \times U$, cuyos elementos se denominan arcos. Podemos definir por lo tanto un grafo SEA como el que tiene por nodos los subsistemas del modelo SEA y como peso ω_{ij} del arco que une dos nodos cualesquiera u_i y u_j la fracción de energía transmitida del primero al segundo [14]. Consecuentemente, los elementos de la matriz de adyacencia del grafo SEA vendrán dados por

$$s_{ij} = \omega_{ij} = \frac{\eta_{ij}}{\eta_j}. \quad (3)$$

Nótese que la definición de los elementos de la matriz de ponderación del grafo, coincide con la matriz generatriz \mathcal{S} introducida en (2). A modo de ejemplo, el grafo SEA correspondiente al modelo SEA de la Figura 1, se representa en la Figura 2.

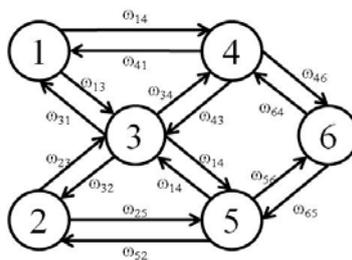


Figura 2 – Grafo SEA de ejemplo

Como veremos, lejos de resultar en una pura formalidad, la definición de un grafo SEA nos permitirá abordar eficientemente distintos problemas en vibroacústica para los cuales no existe solución evidente.

3 Clasificación de vías de transmisión de la energía en SEA

3.1 Caso determinista

Una gran cantidad de problemas en vibroacústica comparte la situación común en la que una fuente de ruido y vibraciones provoca un nivel de energía excesivo en un subsistema receptor. En muchos casos de interés, gran parte de la transmisión de energía entre fuente y receptor tiene lugar a través de un número finito de vías o caminos de transmisión. Es decir, existe un conjunto limitado de vías que contribuyen de forma notable al nivel total de energía en el receptor, y a las cuales denominaremos vías de transmisión dominantes.

Tradicionalmente, cuando el ingeniero quería encontrar cuáles eran estas vías dominantes, lo hacía basándose en su intuición o su experiencia [13]. Sin embargo, es evidente que en muchos casos este procedimiento puede fallar y que sería recomendable disponer de un sistema eficaz para calcularlas y ordenarlas. La contribución energética de una única vía de transmisión de orden n entre a y b , p_{ab}^n , se puede obtener a partir de la definición de Craik [19]

$$p_{ab}^n := \frac{\eta_{ah_1} \eta_{h_1 h_2} \dots \eta_{h_{n-1} b}}{\eta_{h_1} \eta_{h_2} \dots \eta_b}. \quad (4)$$

También es posible calcular las contribuciones de grupos de caminos de un determinado orden a partir de las potencias de la matriz generatriz \mathcal{S} . Por ejemplo, el elemento (i, j) de \mathcal{S}^n contiene la contribución global de todos los caminos de orden n entre i y j [18].

No obstante, el hecho de poder calcular la contribución de un camino o de un grupo de ellos, no proporciona de forma directa las vías de transmisión de energía dominantes. Una posibilidad sería la de calcular las contribuciones de una gran cantidad de caminos, y después, ordenarlos. Sin embargo, este es un procedimiento muy ineficiente desde un punto de vista computacional y uno siempre corre el peligro de que algunos de los caminos no considerados sean importantes. La solución al problema de clasificación de las vías dominantes la encontraremos en el marco de la teoría de grafos.

3.1.1 Planteamiento del problema

Una de las muchas posibilidades que ofrece la teoría de grafos consiste en definir álgebras de caminos para obtener caminos relevantes de un grafo, según su peso, su orden o cualquier característica que se desee otorgarles. Con ello, existen numerosos algoritmos para obtener las vías dominantes de un grafo, es decir, la lista ordenada de caminos que cumple un determinado criterio de dominancia.

Para utilizar estos algoritmos en el grafo SEA, primero cabe definir el parámetro que caracterizará un camino. Como el objetivo es clasificar los caminos en función de su contribución al receptor, el peso del camino debe tener relación con la energía que transmite. Teniendo en cuenta la definición de los pesos de los arcos del grafo en (3) y la definición de camino de Craik en (4), se puede definir la contribución del camino como el producto de los pesos de los arcos que atraviesa,

$$p_{ab}^n := \frac{\eta_{ah_1} \eta_{h_1 h_2} \dots \eta_{h_{n-1} b}}{\eta_{h_1} \eta_{h_2} \dots \eta_b} = w_{ah_1} w_{h_1 h_2} \dots w_{h_{n-1} b} = w(p_{ab}). \quad (5)$$

A partir de (5), el siguiente paso consiste en definir la relación de dominancia entre los caminos. En este caso, como se quieren obtener las vías de máxima transmisión de energía, se afirma que un camino $p_{ab,1}$ domina sobre $p_{ab,2}$ simplemente si su contribución es mayor, i.e. $w(p_{ab,1}) > w(p_{ab,2})$ (veremos que en el caso no determinista establecer la dominancia no resulta tan evidente).

A continuación debemos encontrar un algoritmo que nos permita ir calculando los caminos de forma eficiente y en orden decreciente. El algoritmo debe permitir que las vías contengan bucles, ya que a diferencia de otras situaciones en las que se calculan caminos, la energía puede atravesar varias veces el mismo nodo o subsistema.

3.1.2 Solución

Uno de los algoritmos que cumplen los requisitos anteriormente citados es el algoritmo MPS (ver referencias en [15]). El MPS se basa en el principio de optimalidad, por el cual, el camino dominante se obtiene a partir de concatenar subcaminos dominantes. En otras palabras, si se quiere obtener la vía dominante entre la fuente s y el receptor t , partiendo de s , se elige a cada paso el arco que maximiza la contribución del camino, hasta llegar a t .

Aprovechando este principio, el algoritmo MPS obtiene los caminos dominantes como desviaciones, o ramificaciones, de los caminos anteriormente encontrados. Una ramificación es una vía que comparte los primeros nodos con el camino del cual se está desviando, pero que termina llegando al receptor por una ruta distinta. Así pues, la segunda vía dominante se obtiene como la más dominante de todas las ramificaciones de la primera vía dominante. La tercera se obtiene como la mejor de todas las ramificaciones de la primera y segunda vías, etc.

Para ello, en primer lugar, se calcula el árbol de las vías de transmisión máxima. En él, se representan cuáles son los caminos de máxima transmisión entre cualquier nodo del grafo SEA y el nodo receptor. Para conseguirlo, se puede utilizar el conocido algoritmo de Dijkstra (ver referencias en [15]).

Seguidamente, ya se puede aplicar el algoritmo MPS (previa adaptación con el álgebra adecuada [15]), que utilizando el árbol de caminos máximos, proporciona tantos caminos dominantes como se desee. La primera vía se obtiene directamente del árbol como la que une el nodo fuente con el receptor. Las restantes, se obtienen como se ha anticipado, a partir de las ramificaciones de la misma y comprobando cuál es el arco que maximiza la condición de dominancia en el árbol de vías de máxima transmisión.

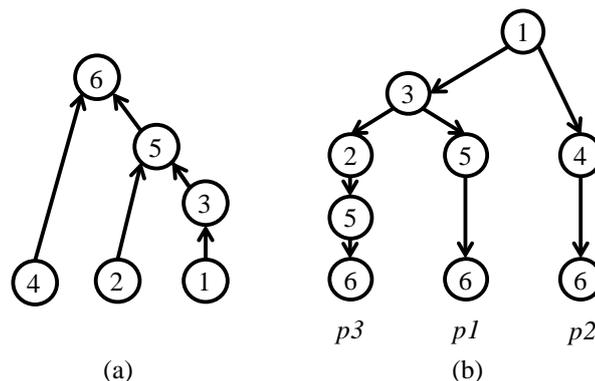


Figura 3 – Aplicación del algoritmo MPS al grafo de la Figura 2 situando la fuente en el nodo 1 y el receptor en el nodo 6. (a) Árbol de las vías de máxima transmisión de energía. (b) 3 primeras vías dominantes.

Siguiendo con el mismo ejemplo de la Figura 1, cuyo grafo se presenta en la Figura 2, en la Figura 3 se muestra el árbol de las vías de máxima transmisión obtenido con el algoritmo de Dijkstra y también las tres primeras vías de transmisión proporcionadas por el algoritmo MPS.

3.1.3 Ejemplo

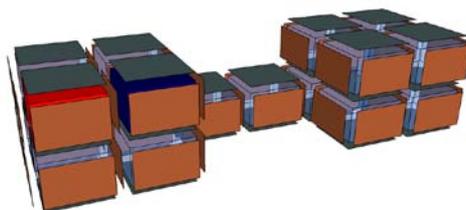


Figura 4 – Modelo de ejemplo: Edificio. Subsistema fuente en rojo y subsistema receptor en azul.

A continuación se presenta una aplicación del algoritmo para un modelo de mayores dimensiones. Se trata del edificio de la Figura 4. Las paredes están construidas con ladrillos y los suelos y techos de hormigón. Las características de los materiales se muestran en la Tabla 1. Las paredes encierran cavidades de 4m x 4m x 2.5 m.

Tabla 1 – Materiales del edificio de la Figura 4

Material	Grosor [m]	Densidad [kg/m ³]	Módulo de Young [GPa]	ILF
Ladrillo hueco	0.07	770	3.5	0.006
Hormigón	0.15	2300	28.1	0.006

Se sitúa una fuente vibroacústica en la cavidad superior izquierda, tal y como se muestra coloreada en rojo en la Figura 4, y el receptor, en azul en la misma imagen, en la cavidad adyacente. Seguidamente se calculan las 500 primeras vías de transmisión.

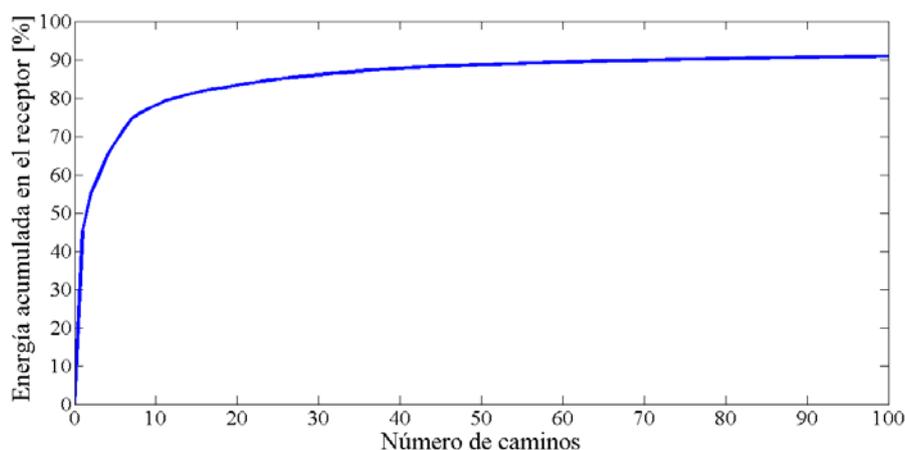


Figura 5 – Porcentaje de energía acumulada en el receptor en relación al número de caminos considerados.

En la Figura 5 se muestra el porcentaje de energía acumulada en el receptor en función del número de caminos que se tienen en cuenta. Así, por ejemplo, se puede observar que los 10 primeros caminos transmiten casi un 80% de la energía de la fuente que llega al receptor (de hecho la primera vía ya transmite un 45% de la energía). Las 100 primeras vías justifican un 90% de la energía en el receptor. Este hecho justifica la elaboración de normas de aislamiento entre viviendas adyacentes basadas en la transmisión del ruido por la vía directa y por las vías laterales de primer orden. Asimismo, si se analizan los subsistemas involucrados en la transmisión, pueden construirse modelos SEA simplificados que supongan una reducción notable del coste computacional.

3.2 Caso no determinista

Como su propio nombre indica, el SEA es un método de base estadística, y sus parámetros se obtienen como representación genérica de un conjunto de elementos de características similares. A pesar de ello, en la sección anterior se ha considerado un sistema SEA en el que los factores de pérdidas eran deterministas i.e., venían dados por constantes. Cabe pues, valorar el efecto que el carácter estocástico de los factores de pérdidas pueda tener en la clasificación de caminos. Consideraremos pues, a partir de ahora, que los factores de pérdidas no vienen definidos por un único valor sino mediante una función de densidad de probabilidad, caracterizada por una media y una varianza.

En consecuencia, se define un nuevo grafo, denominado grafo SEA estocástico [16], caracterizado por una nueva definición de los pesos de los arcos $\tilde{\omega}_{ij}$,

$$\tilde{\omega}_{ij}(\mu_{ij}, \sigma_{ij}) = \mu_{ij} \pm k\sigma_{ij}, \quad (6)$$

donde μ_{ij} es la media del peso del arco, σ_{ij} la desviación típica del mismo y k un real positivo. Podemos observar, por lo tanto, que el grafo SEA estocástico resulta ser un grafo biparamétrico, donde a cada arco le corresponden dos valores, la media y la varianza correspondientes a la variable aleatoria resultante de (3).

3.2.1 Planteamiento del problema

Cuando se ha tratado el problema del caso determinista en la sección 3.1, se han seguido dos pasos. En primer lugar, se ha definido la relación de dominancia entre caminos y en segundo lugar, aprovechando el principio de optimalidad, se ha implementado un algoritmo capaz de calcular y clasificar las vías de transmisión dominantes.

Establecer la relación de dominancia en el caso estocástico no resulta tan trivial como en el determinista, donde simplemente bastaba con comparar los pesos de los caminos, puesto que ahora existen dos parámetros definiendo cada arco. Una de las posibles opciones consiste en definir una función de coste $\Phi(p_{ab})$ para el camino, que incluya tanto el peso medio de los arcos como la varianza. Podemos tomar

$$\Phi(p_{ab}) = \mu_{p_{ab}} + \phi(\sigma_{p_{ab}}^2), \quad (7)$$

donde $\mu_{p_{ab}}$ es el peso medio del camino, que si se trabaja con decibelios se convierte en la suma del peso de todos los arcos que atraviesa, y $\phi(\sigma_{p_{ab}}^2)$ es el término que depende de la varianza y mide la influencia que a dicho parámetro queramos darle. Al igual que para la media, si para simplificar se considera que los pesos de los arcos son variables aleatorias independientes, la varianza de un camino $\sigma_{p_{ab}}^2$ se puede calcular como la suma de las varianzas de todos los arcos que lo forman. Una vez definida $\Phi(p_{ab})$, se establece que un camino $p_{ab,1}$ domina sobre $p_{ab,2}$ si su función de coste es mayor, i.e., si $\Phi(p_{ab,1}) > \Phi(p_{ab,2})$.

Una vez solventado el problema de definir la relación de dominancia entre vías en un grafo SEA estocástico surge otro problema; y es que no se pueden calcular y clasificar caminos en un grafo biparamétrico recurriendo al principio de optimalidad, con lo que el algoritmo MPS del caso determinista no nos resulta útil en este caso.

3.2.2 Solución

Siendo la fuente del problema el carácter biparamétrico del grafo SEA estocástico, una posible solución consiste en transformarlo en un grafo uniparamétrico extendido, sin perder la información sobre la varianza (ver [16] y las referencias allí contenidas). A grandes trazos, el funcionamiento del algoritmo para transformar el grafo estocástico en un grafo uniparamétrico extendido consiste en trasladar la información de la varianza, que se encuentra en los arcos, a los nodos, y después, recuperarla de nuevo para calcular la función de coste del camino. Para ello, en primer lugar, se define el valor máximo de varianza $\sigma_{m\acute{a}x}^2$ que se va a admitir en los caminos que unen la fuente y el receptor. Seguidamente, el intervalo resultante, $[0, \sigma_{m\acute{a}x}^2]$ se discretiza en un valor finito M de subintervalos. A continuación, se procede a la creación del nuevo grafo empezando por la división de los nodos del grafo original en tantas copias en el grafo nuevo como subintervalos se hayan creado. Así, para el nodo u del grafo original, se obtienen los nodos $\{u_0, u_1, \dots, u_M\}$ en el grafo extendido; indicando el subíndice de cada nodo la varianza acumulada de cualquier camino que llegue hasta él. Por ejemplo, todos los caminos que llegan a u_2 tienen como varianza el valor correspondiente al subintervalo 2 del margen de varianzas.

Después, se procede a la conexión de los nodos. Para cada arco (u, v) del grafo original, se reproducen los arcos conectando las copias de los nodos u y v en el grafo extendido, teniendo en cuenta la varianza que el mismo arco está añadiendo. Así, si la varianza del arco (u, v) supone un valor de j

incrementos, se conectan los nodos u_i con los nodos v_{i+j} . En el caso en que el valor de $i + j$ supere el valor de M , la conexión ya no se produce porque no existen nodos con subíndice mayor a M . A cada uno de los arcos generados en el nuevo grafo se le asigna el peso medio que tenía el arco del grafo inicial μ_{uv} .

Por último, se crea un nodo denominado receptor virtual VT (*virtual target*) y se conecta a todos los clones del nodo receptor. En este punto se recupera la información de las varianzas para el cálculo de la función de coste de la siguiente forma. Los arcos que conectan los clones del receptor t_i con el receptor virtual son ponderados según el valor del término de la varianza de la función de coste $\phi(\sigma^2)$. Por ejemplo, al arco que conecta t_i con VT se le asigna el peso $\phi(\sigma_i^2)$.

La Figura 6 muestra un ejemplo de transformación de un grafo estocástico. En este caso, se fija el valor de $M = 3$, con lo que se crean para cada nodo réplicas $\{u_0, u_1, u_2, u_3\}$. Como ejemplo de conexión de los nodos, véase el arco (A, B) . Como tiene por varianza $\sigma_{AB}^2 = 1$, cada réplica del nodo A se conecta con la réplica del nodo B con una posición superior de varianza. Así, A_0 se conecta con B_1 , A_1 se conecta con B_2 , etc. En cambio, A_3 no se puede conectar con ningún otro nodo porque ya ha superado el máximo permitido de varianza. A estos arcos se les asigna el peso μ_{AB} y se repite el mismo proceso para todos los arcos del grafo original.

Para terminar, la fuente se sitúa en el nodo A y el receptor en el nodo D . Se crea el receptor virtual VT y a los arcos que lo conectan con los clones D_i se les asigna el peso $\phi(i)$. El grafo resultante después de realizar la transformación cumple con el principio de optimalidad y, por lo tanto, se le puede aplicar el algoritmo MPS que habíamos utilizado para el grafo SEA determinista usando la nueva relación de dominancia basada en (7).

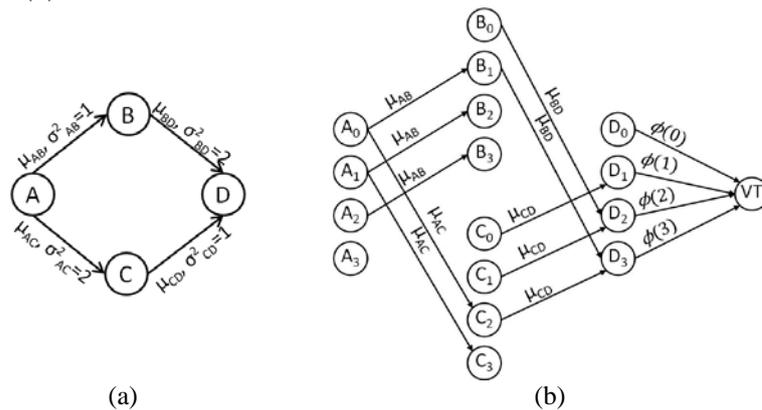


Figura 6 – Ejemplo de transformación de un grafo estocástico biparamétrico (a) en un grafo extendido uniparamétrico (b).

3.2.3 Ejemplo

A continuación, se aplica el nuevo algoritmo al mismo ejemplo de pruebas de la sección 3.1.3. Para ello, previamente se asignan aleatoriamente, desviaciones de entre 0.5 y 3 dB a los factores de pérdidas. Dado que los factores de pérdidas tienden a seguir una distribución lognormal, el término de la función de coste correspondiente a la varianza $\phi(\sigma_{p_{ab}}^2)$ se define como $\phi(\sigma_{p_{ab}}^2) = -3\sqrt{\sigma_{p_{ab}}^2}$. De esta forma, se cumple la regla por la cual el 99.7% de los valores de una distribución normal caen a una distancia de tres desviaciones típicas de la media.

Se calcula la lista de las 100 vías de transmisión dominantes y los resultados se comparan con los obtenidos en el caso del grafo determinista. En la Figura 7 se muestra la posición de los mismos en función de si solo se consideran los valores medios de los factores de pérdidas (grafo determinista) o también se incluye la varianza (grafo no determinista). En verde se muestra la forma que tendría la

gráfica si todas las varianzas valieran cero. En azul, los resultados obtenidos con los valores anteriormente presentados. Así por ejemplo, el camino 53 en la clasificación del grafo no determinista, hubiese tomado la posición 133 en el grafo determinista.

A partir de estos resultados se puede observar, en primer lugar, que cuando la primera vía domina tan claramente sobre las otras, como en el presente ejemplo, aunque el valor de la varianza sea muy alto, raramente ésta dejará de ocupar la primera posición. Sin embargo, a partir de la tercera vía ya pueden apreciarse algunos cambios. A medida que la contribución de las vías disminuye, las variaciones en la posición son claramente más evidentes, como es de esperar. Así pues, en conclusión, se observa que el efecto de la varianza en los parámetros de SEA no puede ser obviado ya que puede tener una influencia notable en la clasificación de las vías de transmisión.

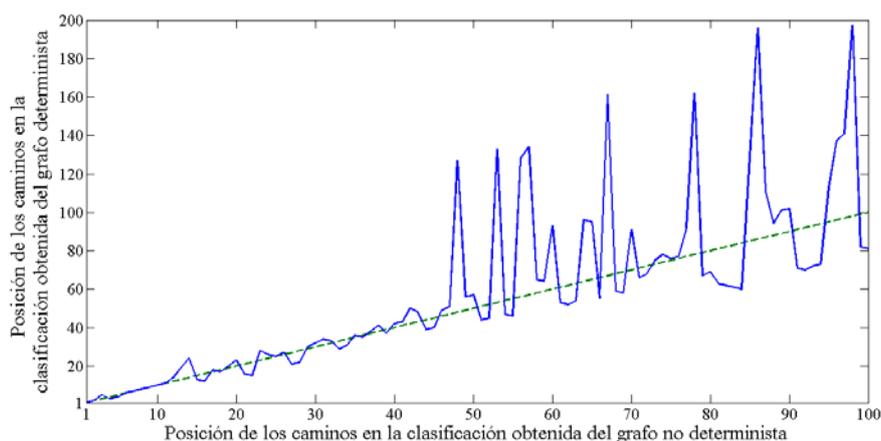


Figura 7 – Comparación de la posición de los caminos entre el grafo determinista y el no determinista.

4 Particiones de grafos SEA para reducir la energía en subsistemas receptores

4.1 Planteamiento del problema

Otra de las situaciones a las que puede enfrentarse un ingeniero vibroacústico es aquella en la que quiere reducir el nivel de energía en un subsistema receptor y además goza de flexibilidad para modificar algunos factores de pérdidas mediante la alteración de algunos elementos físicos del sistema. La modificación de los factores de pérdidas, si se hace de forma correcta y en los subsistemas precisos, puede acarrear la reducción del nivel de energía en el subsistema conflictivo. Sin embargo, en la mayoría de situaciones el número de modificaciones realizables se verá limitado por los costes económicos, o por otros criterios de diseño ajenos al problema vibroacústico que se está tratando, con lo que el objetivo consiste en realizar el mínimo número de modificaciones necesarias para que el nivel de energía en el subsistema problemático se vea reducido en el valor deseado. Este problema se puede abordar mediante técnicas de optimización clásicas [11,12,13], pero veremos que la teoría de grafos nos ofrece alternativas interesantes al respecto [14,17].

4.2 Solución

La idea básica en este caso consiste en recurrir a técnicas de partición de grafos. Supongamos que tenemos dos subsistemas, fuente y receptor, s y t , y que queremos disminuir el nivel de energía recibido en t . Podemos plantearnos partir el grafo SEA en dos subgrafos de tal forma que uno de ellos

contenga el nodo fuente s y el segundo subgrafo contenga el nodo receptor t . La partición del grafo se hace mediante la eliminación de algunos arcos, sin necesidad de que los subgrafos resultantes sean conexos y dicho corte se denomina corte $s - t$.

El hecho de separar físicamente los nodos s y t para que pertenezcan a subgrafos distintos, conlleva la ruptura de todas las vías de transmisión los unían, con lo que en el caso del grafo SEA, esto implicaría lógicamente que no habría transmisión de energía entre ellos.

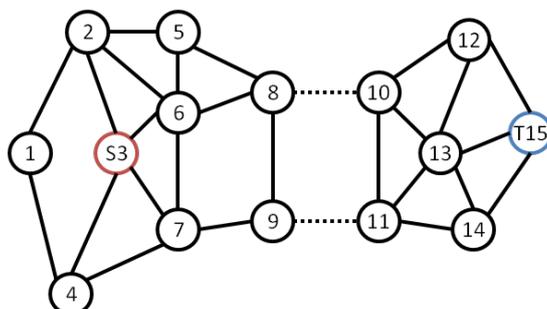


Figura 8 – Ejemplo de corte de un grafo con la fuente situada en el nodo S3 y el receptor en el nodo T15. La línea de puntos indica los arcos que han sido eliminados para realizar el corte.

Obsérvese en la Figura 8, en la que se sitúa la fuente en el nodo S3 y el receptor en el nodo T15, como una vez eliminados los arcos (8,10) y (9,11), no existe ningún camino que conecte el nodo fuente con el nodo receptor.

Obviamente, en una situación real, no se pueden eliminar de forma absoluta los arcos como se hace en un grafo (¡ello implicaría cortar una estructura en dos!) pero lo que sí se puede hacer es modificar los pesos de los arcos dados por (3) que pertenecen al corte. Si reducimos los pesos de dichos arcos estaremos afectando a todas las vías de transmisión entre fuente y receptor. Así pues, podemos implementar un algoritmo iterativo en que se vayan calculando cortes del grafo SEA de menor a mayor tamaño, hasta que las modificaciones hechas en los arcos implicados sean suficientes para reducir el nivel de energía en el receptor en el nivel deseado.

4.3 Ejemplo

Recurrimos nuevamente al ejemplo anterior del edificio de la Figura 4, cambiando la situación de las fuentes (en rojo) y los receptores (en azul) tal y como se ve en la Figura 9a, y aplicamos el algoritmo de cortes en grafos para sistemas con múltiples fuentes y receptores [17]. Se considera que a cada pared se le puede añadir un trasdosado, a cada unión entre placas (paredes, suelos o techos) se le puede añadir una junta elástica y a cada suelo o techo, un recubrimiento, reflejándose todas estas modificaciones en variaciones en los factores de pérdidas correspondientes. El objetivo es reducir 30 dB SPL en los subsistemas receptores, en todas las bandas de octava, de 125 Hz a 2 kHz.

Siguiendo las prácticas habituales en ingeniería acústica, la primera opción cuando se quiere reducir la transmisión de energía es atacar directamente a la fuente. Sin embargo, en este caso, existe un cuello de botella en la estructura entre fuentes y receptores que involucra un menor número de modificaciones, y que es el que automáticamente detecta el algoritmo de corte de grafos como primer punto débil a abordar.

En efecto, después de aplicar el algoritmo, las modificaciones propuestas son las que refieren a los elementos pertenecientes al cuello de botella entre fuentes y receptores y señalados en verde (trasdosados) y amarillo (juntas elásticas) en la Figura 9a. Con un total de únicamente 5 modificaciones, que incluyen 4 juntas elásticas y un trasdosado, y que afectan a un total de 9 factores de acoplamiento, el resultado es que en todas las bandas de frecuencia y en ambos receptores, la reducción del nivel de energía es superior a los 35 dB (ver Figura 9b).

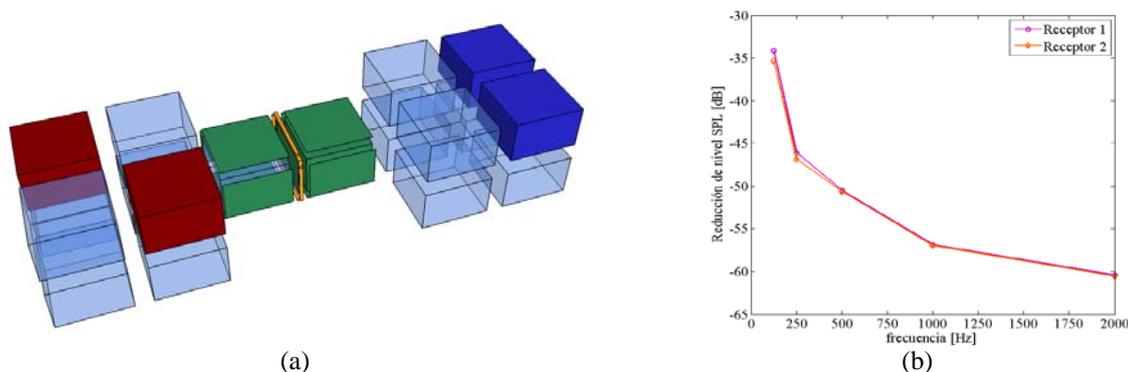


Figura 9 – Resultados del algoritmo de corte en grafos. (a) Mínimas modificaciones a realizar para obtener la máxima reducción en los receptores. En rojo las fuentes vibroacústicas, en azul los subsistemas receptores, en verde (trasdosados) y amarillo (juntas elásticas), las modificaciones a añadir. (b) Reducción de energía obtenida después de aplicar las modificaciones.

5 Conclusiones

En este artículo hemos revisado algunos avances recientes que conciernen la aplicación de la teoría de grafos a la resolución de problemas de transmisión de la energía en modelos SEA (Análisis Estadístico Energético). La utilidad de este enfoque se ha comprobado mediante la aplicación a ejemplos concretos. Actualmente nuestros esfuerzos se centran en extender los conceptos aquí presentados a modelos numéricos para el rango de bajas frecuencias (modelos de elementos finitos) y frecuencias intermedias (modelos híbridos).

Agradecimientos

À. Aragonès quisiera expresar su agradecimiento al Departament d'Universitats, Recerca i Societat de la Informació de la Generalitat de Catalunya, por el soporte recibido en esta investigación a través de una beca predoctoral FI-DGR 2012.

Referencias

- [1] Transfer path analysis: The qualification and quantification of vibro-acoustic transfer paths, in: LMS International. *Application Notes*, 1995.
- [2] Tschudi, H.R. The force transmission path method: an interesting alternative concerning demounting tests. *Unikeller Conference 91*, 1991.
- [3] Thite, A.; Thompson, D. The quantification of structure-borne transmission paths by inverse methods. Part 1: Improved singular value rejection methods. *Journal of Sound and Vibration* Vol. 264, 2003, pp. 411-431.
- [4] Inoue, A.; Singh, R.; Fernandes, G. Absolute and relative path measures in a discrete system by using two analytical methods. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 313(3-5), 2008, pp. 696-722.
- [5] Magrans, F.X.; Method of measuring transmission paths. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 74(3), 1981, pp. 311-330.

- [6] Guasch, O.; Magrans, F.X.; The Global Transfer Direct Transfer method applied to a finite simply supported elastic beam. *Journal of Sound and Vibration* Vol. 276 (1-2), 2004, pp. 335-359.
- [7] Guasch, O. Direct transfer functions and path blocking in a discrete mechanical system. *Journal of Sound and Vibration* Vol. 321(3-5), 2009, pp. 854-874.
- [8] Noumura, K.; Yoshida, J. Method of transfer path analysis for vehicle interior sound with no excitation experiment. *Proceedings of FISITA 2006*, F2006D183, Yokohama, Japan, 2006.
- [9] Gajdatsy, P.; Janssens, K.; Desmet, W.; Van der Auweraer, H. Application of the transmissibility concept in transfer path analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing* Vol. 24(7), 2010 pp. 1963-1976.
- [10] Janssens, K.; Gajdatsy, P.; Gielen, L.; Mas, P.; Britte, L.; Desmet, W.; Van der Auweraer, H. OPAX: A new transfer path analysis method based on parametric load models, *Mechanical Systems and Signal Processing* Vol. 25(4), 2011, pp. 1321-1338.
- [11] Dinsmore, D.; Unglenieks, R. Acoustical optimization using quasi-Monte Carlo methods and SEA modeling. *SAE 2005 Noise and Vibration Conference and Exhibition*, Grand Traverse, MI, USA, May 2005, Paper 2005-01-2431.
- [12] Bartosch, T.; Eggner, T. Engine noise potential analysis for a trimmed vehicle body: Optimization using analytical SEA gradient computation technique. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 300(1-2), 2007, pp. 1-12.
- [13] Büssow, R.; Petersson, B. Path sensitivity and uncertainty propagation in SEA, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 300(3-5), 2007, pp. 479-489.
- [14] Guasch, O.; Cortés, L. Graph theory applied to noise and vibration control in statistical energy analysis, *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol 125 (6), 2009, pp 3657-3672.
- [15] Guasch, O.; Aragonès, À. Finding the dominant energy transmission paths in statistical energy analysis, *Journal of Sound and Vibration* Vol. 330(10), 2011, pp. 2325-2338.
- [16] Aragonès, À.; Guasch, O. Considering the stochastic nature of loss factors to classify energy transmission paths in SEA. *ICSV19*, Vilnius, Lithuania, July 8-12, 2012.
- [17] Guasch, O.; Aragonès, À.; Janer, M. A graph cut strategy for transmission path problems in statistical energy analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing* Vol. 30, 2012, pp. 343-355.
- [18] Magrans, F.X. Definition and calculation of transmission paths within a SEA framework. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 165(2), 1993, pp. 277-283.
- [19] R.J.M.Craik, Sound transmission paths through a statistical energy analysis model, *Applied Acoustics* Vol. 30, 1990, pp. 45-55.