

# Model per a categoritzar les bones estratègies en estimació en numeració i càlcul emprades pels infants en acabar l'educació primària

Dra. Mercè Pañellas i Valls

Membre del grup de recerca PSITIC de la FPCEE Blanquerna

## Presentació

**L'**estimació, per la inexactitud i l'aparent manca de rigor que comporta, ha estat, i encara continua essent, un contingut deixat de banda en els currículums escolars, entestats fins fa poc temps a presentar una matemàtica exacta, tancada, acabada, plena de normes i poc flexible. En canvi, nosaltres el considerem un contingut de primer ordre i d'importància cabdal. Conseqüència d'aquesta poca consideració curricular és la manca del domini d'estratègies d'estimació en numeració i càlcul, per part de l'alumnat, que hem constatat durant anys en diferents nivells educatius.

Aquest informe resumeix una part, *la determinació dels tipus i categories d'estratègies acceptables*, d'un treball de tesi doctoral que consta de dues parts principals: la creació i validació d'un test per analitzar quatre àmbits d'estimació en numeració i càlcul i una segona part experimental que suposa l'aplicació dels instruments de mesura a una mostra per po-

der esbrinar, a partir de les respostes dels infants, els tipus d'estratègies, de dificultats i d'errors. Posteriorment, s'arriba a establir categories per, a tots tres i concloure amb orientacions didàctiques que redundin en la millora de la competència numèrica dels estudiants a partir d'una adequada instrucció a l'aula.

### **L'estimació com a procediment clau en les matemàtiques de l'ensenyament obligatori**

És fàcil justificar la necessitat d'incrementar la presència de l'estimació en els currículums escolars de l'ensenyament obligatori. L'aprenentatge matemàtic de començaments del segle XXI s'hauria de basar en la resolució de problemes. Però aquests problemes no són els problemes convencionals en què, amb l'aplicació d'unes determinades regles, s'arriba a una solució única. L'ensinistrament vers la resolució de problemes comporta aconseguir que l'infant desenvolupi la capacitat d'encarar-se a situacions noves i canviants que ben segur que no es podran mirar només des d'una òptica unilateral. La resolució d'aquests problemes no tindrà regles fixes i la solució podrà estar dins un interval d'acceptabilitat. L'aprenentatge de la resolució d'aquest tipus de problemes requereix, per tant, un canvi conceptual i estructural del currículum de matemàtiques dels ensenyaments primari i secundari, que impliqui una visió interdisciplinària que ha de donar-se dins i fora de les mateixes matemàtiques, en relació amb altres matèries. I en aquest nou disseny del currículum, l'estimació hi té un paper important, ja que és una tècnica d'anàlisi present tant en les ciències quantitatives com en les qualitatives. Callís (2002) indica que el món quantificable sempre ha estat un objectiu matemàtic, com es demostra amb l'estadística i la probabilitat, que fan estimacions; però, cada vegada més, el món qualitatiu es va convertint en quantificable i estimatiu quan, a partir de certs indicadors, podem estimar la previsió dels resultats; com quan un metge diagnostica una malaltia basant-se en determinades simptomatologies.

Per altra banda, moltes de les activitats de la vida quotidiana, des de les més elementals com anar a comprar, que ens fa fer estimacions prèvies i valorar-ne el resultat per prendre decisions, fins a altres de més complexes, sofisticades i transcendentals en el món de l'economia, la meteorologia, la medicina, etc., i que comporten inexactitud matemàtica, fan que l'estimació sigui funcional i útil.

L'accent posat en la resolució de problemes fa que la concepció del càlcul s'obri a noves perspectives, en les quals el càlcul mental, exacte i estimatiu van adquirint importància, en el sentit de presa de decisions respecte al mètode que és més convenient per a cada situació problemàtica.

A més a més, estimular un aprenentatge on es prioritzin els mètodes i les estratègies, és a dir, on induir, deduir, representar, investigar, etc. siguin els elements que marquin el camí del treball matemàtic a l'aula, com indiquen Alsina i altres (1998), comportarà l'adquisició de competència numèrica, en càlcul mental i estimatiu, que com afirmen Goñi i altres (2000), segueix essent un factor bàsic per al desenvolupament econòmic i per a la integració social, no desvirtuada pels avenços del càlcul electrònic.

És pel que hem dit que no prestar atenció a la formació en l'àmbit de l'estimació implica renunciar a parts importants de l'educació matemàtica, perquè l'habilitat per estimar dota qui la té d'una sèrie d'estratègies i de recursos procedimentals, imprescindibles per adquirir un bon domini de la computació numèrica i, en definitiva, assolir sentit numèric.

Molt de l'èmfasi posat en el sentit numèric és una reacció davant dels procediments de càlcul, que sovint són algorísmics i buits d'aquest sentit. Per exemple, Wyatt (1986) observa que la reacció dels estudiants, quan se'ls pregunta si un càlcul efectuat els sembla raonable, és tornar a calcular, normalment utilitzant el mateix mètode que per al càlcul inicial, i rarament estudien el resultat a la llum del context en el qual estan implicats els nombres.

Però el sentit numèric no és un ens finit que l'alumne té o no té, sinó un procés que es desenvolupa i madura amb l'experiència i el coneixement (B. J. Reys, 1994), i aquesta progressió és el resultat de l'exploració numèrica, visualitzant els nombres en contextos variats i relacionant-los en processos que no estan limitats pels algorismes tradicionals (Howden, 1989). Treballar només amb algorismes escrits basats en la mecanització –que prenen el nombre no globalment, sinó parcialitzat en els dígit– no ajuda a adquirir la sensibilitat respecte a l'ús del nombre.

És per això que, a l'escola primària, els infants han de desenvolupar tècniques bàsiques de càlcul per entendre les dimensions i relacions numè-

riques. El càlcul mental i l'ús de la calculadora són dos bons mitjans per a treballar aquestes relacions. Els alumnes desenvoluparan un bon sentit numèric si entenen els nombres i com es relacionen, si en coneixen la magnitud relativa i si han desenvolupat referents per a quantitats i mesures. En l'àmbit del món escolar, un dels objectius primordials és la comprensió del llenguatge numèric, i aquesta capacitat la podem observar si veiem que els alumnes són capaços de fer càlculs mentals de manera flexible, si realitzen estimacions en càlculs més complexos, si són capaços de fer judicis quantitius i si poden reconèixer la raonabilitat dels resultats.

Tanmateix, el sentit numèric, com que és una forma de pensar, no és un contingut propi del currículum de matemàtiques, sinó una manera d'entendre el treball amb nombres a l'aula (Llinares, 2001). Però en aquesta accepció és educable, i l'esforç mental de l'estimació jugarà un paper molt important de cara a desenvolupar-lo.

### **Recerques sobre estratègies en estimació en numeració i càlcul. Antecedents que sustenten la identificació i classificació d'estratègies**

Pel que fa a recerques sobre estratègies d'estimació en numeració i càlcul, molts han estat, en les darreres dècades, els estudis que s'han fet per a identificar-les. Els investigadors descriuen els processos clau associats a les correctes estratègies d'estimació utilitzant diversitat de criteris que fa difícil fer-ne una classificació. Tanmateix, per fer-ne un resum, val a dir que les aportacions d'aquestes recerques, entre les quals destaquem les de Levine (1982), Reys, Bestgen, Rybolt i Wyatt (1980 i 1982), Rubenstein (1985), Sowder (1984 i 1994), Brame (1986), Segovia (1986), Sowder i Wheeler (1989), Forrester (1990), Goodman (1991), Reys, Reys, Nohda i Ishida (1991), Dowker (1992 i 1997), LeFevre, Grenham i Waheed (1993), Berry (1999), Lemaire, Lecacheur i Farioli (2000), Hanson i Hogan (2000), De Castro, Castro i Segovia (2002) i Lemaire i Lecacheur (2002), fan referència essencialment a:

#### *a. Tècniques específiques d'estimació en numeració i càlcul:*

Reduir a primers dígit (límit davanter), arrodonir al proper múltiple de 5, 10, 100, etc., truncar, utilitzar nombres compatibles (substitució), canviar l'ordre de les operacions per facilitar el procés, o les operacions per altres d'equivalents (translocació), compensació intermèdia o final, ignorar nombres insignificants, substituir per nombres especials, terme

mitjà o estratègia d'agrupament, canviar nombres naturals o decimals per potències de 10, canviar nombres decimals per fraccions o percentatges i procediment algorísmic.

*b. Continguts relacionats amb l'estimació en numeració i càlcul, imprescindibles per ser un bon estimador:*

Fets bàsics per a totes les operacions, valor de posició, propietats aritmètiques, descomposicions additives o factorials, ordre de magnitud, proporció, afitament, equivalències entre operacions, operacions amb potències de 10 i operacions amb múltiples de 10, així com el coneixement de tècniques de càlcul mental.

*c. Utilització de processos estimatius:*

Reconèixer que els nombres aproximats es poden fer servir per calcular, acceptar més d'un procés per fer una estimació, acceptar més d'un valor en una estimació, reconèixer el procés més apropiat segons el context, reconèixer que el procés depèn de la necessitat de precisió i reconèixer la raonabilitat de l'ús de l'estimació.

*d. La relació de l'estimació amb la resolució de problemes:*

Comprensió, anticipació de la desposta, resolució i revisió.

*e. Components afectius de l'estimació:*

Confiança en l'habilitat per fer matemàtiques i per estimar, tolerància de l'error i reconeixement de la utilitat de l'estimació.

## **Objectiu de la recerca**

Saber quins són els procediments que utilitzen les persones per fer estimacions, si demostren sentit numèric i, per tant, quines són les estratègies que empren, comprendre-les, descriure-les i interpretar-les, arribant a tipificar-les i categoritzar-les, és un dels objectius primordials de la recerca. Com ja hem dit, la recerca que aquí s'explica forma part d'una més global que incorpora a més de l'anàlisi de les estratègies, la dels errors i la de les dificultats que mostren els infants en acabar l'educació primària, quan realitzen processos d'estimació en numeració i càlcul, amb la mirada posada a trobar elements que ens permetin millorar l'aprenentatge dels nombres, les relacions numèriques i el coneixement de les operacions aritmètiques, i també la fluïdesa en el càlcul a partir de saber fer estimacions raonables.

## Metodologia emprada

### Disseny i instruments

Atès el nostre objectiu d'esbrinar l'habilitat dels infants en tasques estimatives de numeració i càlcul, acabada l'educació primària, no podem cenyir el nostre estudi a un o a uns aspectes concrets de l'estimació. Per aquest motiu, la primera qüestió per resoldre ha estat delimitar l'univers de continguts, concretar el camp temàtic i enquadrar el problema d'investigació.

Això ens ha portat a dibuixar quatre àmbits analitzables per separat i que conjuntament reuneixen els aspectes fonamentals de l'estimació numèrica i calculatòria adients al nivell educatiu en què estan immersos els infants, l'habilitat dels quals en tasques estimatives volem avaluar. Aquests àmbits s'han dividit en subàmbits que els concreten.

Àmbit 1: Utilitzar correctament tècniques d'aproximació adients a la situació plantejada.

Àmbit 2: Prendre decisions en activitats d'estimació en càlcul aritmètic que comportin la necessitat d'escollir una estratègia d'entre diverses possibles.

Àmbit 3: Comprendre l'existència de l'error en estimació en càlcul i ser conscient de la necessitat d'ajustar l'estimació quan calgui.

Àmbit 4: Reconèixer la raonabilitat d'un resultat obtingut o donat: sobre la realitat física, en termes de relacions numèriques i en la resolució de problemes.

Tanmateix som conscients que els processos estimatius no van deslligats dels processos més generals del càlcul i de les propietats de les operacions en els diversos conjunts numèrics. D'aquesta manera, hem cregut convenient enfocar el nostre treball des d'una visió cartesiana que conjumini les dues perspectives, els àmbits definits i els objectius i continguts generals de numeració i càlcul de l'educació primària, bo i preferint la valoració des de la primera per la major relació que té amb el nostre objecte d'estudi.

Per copsar la situació de coneixement lògic i resolutori dels infants i el seu nivell de competència en càlcul estimatiu, atenent a aquests criteris, i arribar a categoritzar les estratègies, les difiultatats i els errors, tractarem d'obtenir dades tant a partir dels resultats dels exercicis que els alumnes resolen com del procés que segueixen per arribar a determinades respostes.

Això implica un tractament diferenciat de les dades segons la naturalesa que tinguin. Per aquest motiu distingirem dos tipus de dades, les que admeten una anàlisi quantitativa i les que requereixen una anàlisi qualitativa, i tres estadis d'anàlisi, que ens conduiran a dos nivells de diagnosi.

Per fer el primer nivell de diagnosi hem construït un test, que anomenem TENC (*Test d'estimació en numeració i càlcul*)<sup>1</sup>, elaborat expressament per a aquesta investigació. Aquest test és format per 73 ítems emmarcats en 10 situacions que majoritàriament comporten càlculs aplicats en les dimensions numèriques dels nombres naturals i dels nombres decimals i que són:

Situacions	Contingut de les situacions
Situació 1	Anàlisi de la raonabilitat de resultats sobre la realitat física amb nombres naturals i decimals i reconeixement del valor numèric més adient a la qüestió plantejada
Situació 2	Comparació de nombres naturals i decimals, per afíament o aproximació i dins unes fites establertes, amb nombres propers o amb potències de 10, que implica ordenar-los
Situació 3	Arrodoniment de nombres naturals i decimals a un ordre d'unitat donat, o determinació de l'ordre d'unitat al qual s'ha fet l'aproximació
Situació 4	Càlcul estimatiu additiu (addició i subtracció) de nombres naturals en problemes d'una sola operació o de comparació d'operacions
Situació 5	Càlcul estimatiu additiu de nombres decimals en problemes d'una o dues operacions
Situació 6	Càlcul estimatiu multiplicatiu (multiplicació i divisió) de nombres naturals en problemes que requereixen una sola operació
Situació 7	Càlcul estimatiu, multiplicatiu, de nombres decimals per nombres naturals, en problemes que requereixen una sola operació
Situació 8	L'error en estimació. Magnitud de l'error. Compensació d'un resultat donat o obtingut en fer operacions de suma, resta, multiplicació i divisió de nombres naturals
Situació 9	Anàlisi de la raonabilitat en termes de relacions numèriques, en operacions aritmètiques de nombres naturals i decimals, aplicant les propietats pròpies de cadascuna
Situació 10	Anàlisi de la raonabilitat de resultats en la resolució de problemes els elements numèrics dels quals són nombres naturals o decimals

Taula 1. Contingut de les situacions del test TENC

La validació i fiabilització de l'esmentat test verificà la hipòtesi que és vàlid per al diagnòstic i pronòstic didàctic de l'aprenentatge de l'estimació en numeració i càlcul, dintre l'àrea de matemàtiques, i per als alumnes que han acabat l'educació primària.

Aquest primer nivell de diagnosi s'efectua a partir de les aportacions de dos estadis d'anàlisi de les respostes del test. El primer, totalment quantitatiu, deriva de les qualificacions del test i de l'estudi estadístic associat, i el segon, ja de tractament qualitatiu, de l'estudi de les respostes als ítems.

Tanmateix, atès que les estratègies utilitzades pels alumnes no són clarament observables a partir de les respostes del test, vam optar per construir un segon instrument consistent en un test més breu, i que anomenem *test raonat*, de 25 ítems seleccionats del test complet segons uns criteris preestablerts, en el qual els estudiants no només haguessin de donar una resposta a les qüestions plantejades, sinó el raonament seguit per arribar-hi.

L'observació de les estratègies que els estudiants construeixen per elaborar les seves respostes ens permeten un tercer estadi d'anàlisi, que es complementa amb un tercer instrument, *entrevistes individuals*, que aporten més quantitat de matisos per poder fer un segon nivell de diagnosi.

En aquest nivell distingirem les estratègies acceptables que utilitzen els bons resolutors de les que no ho són i definirem les categories en les quals agrupem les primeres.

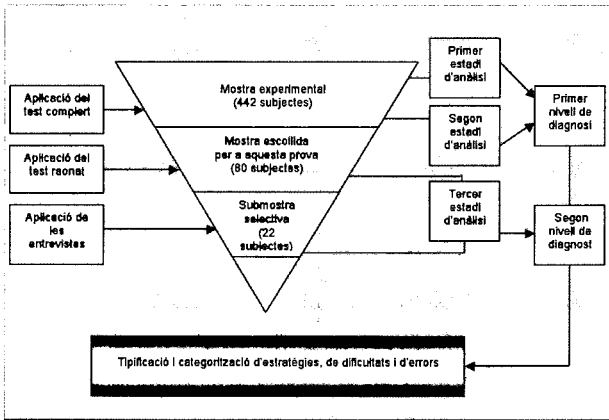
El sistema de categories constitueix l'instrument bàsic de mesura en la investigació observacional, atès que no existeix cap situació que es pugui considerar prototípica ni conducta estàndard, sinó que requereix la construcció d'una mena de bastimenta que proporcioni suport a aquelles conductes que, mitjançant la corresponent operació de filtratge, són considerades rellevants d'acord amb els objectius de la investigació (Arnau i altres, 1990).

Categoritzar suposarà formar un sistema tancat que s'ajusti a les condicions d'exhaustivitat, en l'àmbit considerat, i mútua exclusivitat. Val a dir que no podem observar el tot, i per tant les categories que configuren un sistema formen un subconjunt de la realitat observable en la



situació estudiada, i l'exhaustivitat del sistema només es refereix als sectors de comportament estudiats.

En l'esquema es representa en forma de triangle invertit, entenent com a tal l'aprofundiment i l'afinació en l'estudi, els estadis d'anàlisi i els nivells de diagnosi que se segueixen en la investigació.



Esquema 1. Estadis d'anàlisi i nivells de diagnosi

## Subjectes

L'estudi es va fer amb 522 alumnes de primer curs de l'educació secundària obligatòria, de set escoles de la província de Barcelona, amb un total de dinou grups classe. 442 van respondre el test complet de 73 ítems i 80 el test raonat, més breu, de 25 ítems. Dels 442 que van realitzar el test complet, 22 van ser objecte d'entrevista.

## Resultats de l'estudi quant a les categories d'estratègies

Els mètodes que els infants empren per resoldre tasques d'estimació en numeració i càlcul constitueixen un ventall de camins que s'adapten als mateixos coneixements i a la situació plantejada i fan que es desenvolupin mecanismes de reflexió sobre el procés més adient, les relacions numèriques i les propietats de les operacions. És per això que quan parlem d'estratègies ens referim a quelcom més que a les tècniques d'aproximació de les dades per facilitar un càlcul. Articulem tot un recorregut de decisions que comença en decidir l'operació a fer, i de ve-

gades també les dades, l'elecció de la tècnica més adient d'aproximació, l'obtenció del resultat, la valoració d'aquest resultat i l'aplicació d'un ajustament, si és necessari. Així, per definir els tipus d'estratègies acceptables utilitzades pels alumnes hem considerat nou variables tenint en compte els estudis previs fets sobre estimació en càlcul i numeració i les característiques associades als bons estimadors, però que també sorgeixen de l'anàlisi de les respostes dels alumnes.

Les 9 variables que considerarem per analitzar una estratègia d'estimació són:

### **V1. Decisions lligades al disseny de l'activitat**

*1.a Diversitat de realitats i punt de vista que cal usar per interpretar-les:  
Exacte o aproximat*

*1.b Elecció del procés de càlcul estimatiu*

*1.c Elecció de les operacions*

*1.d Elecció de les dades*

### **V2. Pcessos o tècniques de càlcul estimatiu**

*2.1 Arrodoniment*

*2.2 Truncament*

*2.c Substitució:*

*2.c.1 Per nombres compatibles*

*2.c.2 Per nombres manejables*

*2.c.3 Pel canvi de decimals pel quart següent o anterior*

*2.d Terme mitjà*

*2.e Translació*

*2.f Procediment algorísmic*

*2.g Ignorar parts insignificants del nombres*

### **V3. Nombre de díigits dels nombres transformats en fer una aproximació**

*3.a Es manté el mateix nombre de díigits que els nombres originals respectivus*

*3.b Es fa una reducció a primers díigits (xifres de l'esquerra més significatives)  
i es menyspreen les altres*

### **V4. Compensacions**

*4.a Intermèdia*

*4.b Final*

## **V5. Reflexions sobre el resultat d'una aproximació numèrica o d'un càlcul aproximat**

*5.a Atendre a la raonabilitat del resultat*

## **V6. Propietats i ús adequat de les operacions**

*6.a Distributivitat*

*6.b Associativitat*

*6.c Invariància (de la diferència o de la raó)*

*6.d Inversió suma- resta*

*6.e Inversió multiplicació- divisió*

## **V7. Processos addicionals**

*7.a Comparació*

*7.b Ordenació*

*7.c Tempteig*

*7.d Descomposicions numèriques:*

*7.d.1 Additiva*

*7.d.2 Subtractiva*

*7.d.3 Factorial*

*7.f Proporcionalitat:*

*7.f.1 Directa*

*7.f.2 Inversa*

*7.e Afitament (punts de referència)*

## **V8. Habilitats matemàtiques relacionades amb el coneixement del sistema de numeració decimal**

*8.a Ordre de magnitud / Valor de posició*

*8.b Mida numèrica relativa*

## **V9. Dimensions numèriques i operatives**

*9.a Dimensió dels nombres:*

*9.a.1 Nombres naturals*

*9.a.2 Nombres decimals*

*9.b Dimensió de les operacions:*

*9.b.1 Addició*

*9.b.2 Subtracció*

*9.b.3 Multiplicació*

*9.b.4 Divisió*

Les nou variables es classifiquen en tres grups, que són:

1. Variables lligades al mateix disseny de l'activitat: V1 i V9
2. Variables referents a processos cognitius: V2, V3, V4, V6, V7 i V8
3. Variables referents a processos metacognitius: V5

Establirem les categories atenent en primer lloc a les tres variables següents:

Nombre d'elements a escollir abans de realitzar el procés d'estimació (V1)

Nombre de tècniques d'estimació que s'apliquen (V2)

Si s'efectua algun tipus de compensació o no (V4)

El fet de prioritzar l'elecció d'aquestes tres variables per establir les categories es deu en primer lloc al fet que no podem definir tantes categories com possibles combinacions hi ha de les 9 variables, perquè el nombre seria molt elevat, gairebé pròxim al nombre d'estratègies descrites. D'altra banda, com que el nostre estudi analitza el treball d'estimació, les variables V2 i V4 són les que fan referència més directa a processos cognitius en aquest àmbit. De les variables lligades al disseny de l'activitat prioritzem la V1, ja que les decisions sobre operacions i processos les creiem rellevants, i en fer les subcategories ja podem apreciar a quin tipus de dimensió numèrica i operacional fan referència.

Proposem el model DPC (Decisions sobre l'activitat, Procés d'estimació, Compensació), creat per a aquesta recerca, amb aquestes tres variables, que constitueixen el nucli central de les categories. El model DPC i les subcategories que se'n deriven completa, al nostre entendre, el model RTC (Reformulació, Translació i Compensació), definit per Reys, Bestgen, Rybolt i Wyatt (1982), en el qual es basen De Castro, Castro i Segovia (2002) per presentar un model alternatiu per a les estratègies d'estimació, on aquestes es consideren de manera global i estan integrades per destreses d'estimació: processos de reformulació, translació, compensació i valoració del resultat.

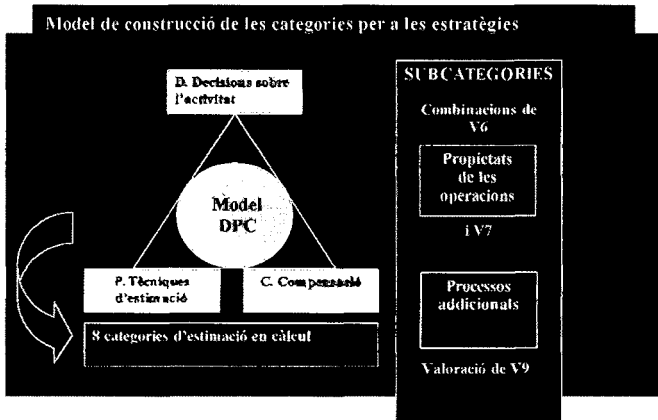
Per establir les subcategories ens fixarem en primer lloc en les possibles combinacions de les variables V6 i V7 de processos cognitius per la importància en el càlcul mental, en general, del coneixement i l'ús adequat de les propietats de les operacions i dels procediments com descomposició, comparació, punts de referència, etc. De cadascuna d'aquestes combinacions indicarem la dimensió dels nombres i les operacions V9. De cada categoria valorarem globalment la variable meta-

cognitiva V5 sobre la valoració de la raonabilitat de resultats i les variables V3 i V8, corresponents a la reducció o no de díigits en els nombres transformats en fer una aproximació i al coneixement de l'ordre de magnitud i de la mida numèrica relativa, respectivament.

En el nostre estudi hem decidit prioritzar unes determinades variables per a la constitució de les categories i de les subcategories pels motius exposats, però sota aquest model es pot aixoplugar qualsevol estratègia que facin els infants des de l'òptica de les nou variables, o, si es vol, sense considerar-les totes. A més a més, variant les variables que s'han utilitzat per crear les categories i les subcategories es poden construir models similars, prioritzant les variables que interressi segons les característiques i necessitats de cada recerca.

L'esquema següent il·lustra la manera d'establir les categories i les subcategories.

**Esquema 2.** Model DPC per a la categorització de les estratègies acceptables



Hem utilitzat codis numèrics per simplificar la representació de les categories i les subcategories. Així, per exemple, una categoria amb codi 210 significa que s'han escollit correctament dos elements (variable 1), que s'ha utilitzat un sol procediment d'aproximació de les dades (variable 2) i que no s'ha efectuat compensació (variable 4). Per indicar la subcategoria afegim dos nombres al codi de la categoria que expressen la utilitat.

zació o no (un 1 o un 0, respectivament), en aquest ordre, de propietats de les operacions (variable 6) i de processos addicionals (variable 7). Així, a l'ítem del test que diu:

La Marta, quan va a comprar, fa càlculs aproximats ràpidament per saber quan li costaran les coses, però sovint les aproximacions que fa s'allunyen massa del resultat exacte i no sap si porta prou diners o no. És per això que et demano que et miris els càlculs que ha fet la Marta i diguis si al resultat que dona cal afegir-li o treure-li alguna quantitat perquè s'acosti més a l'exacte

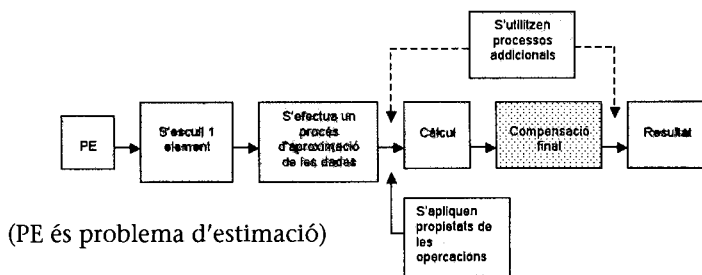
$$26 \times 18 @ 200$$

Un alumne respongué: *"Doncs multiplicant 25 x 20, més ben dit 25 x 2 i després per 10. Com que són 500, 500 - 200 = 300. Sumaria 300 ».*

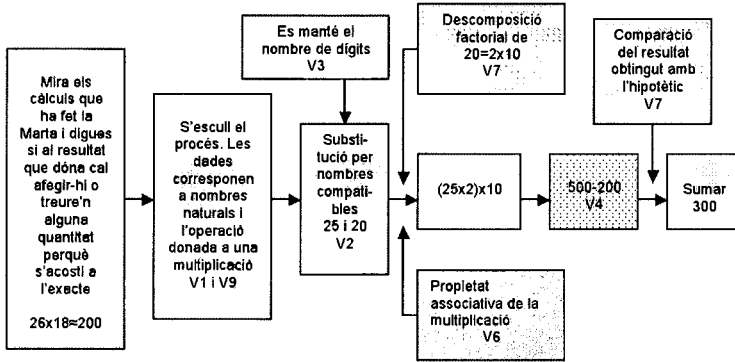
Aquesta estratègia comporta substituir els factors per nombres propers fàcils de multiplicar, descompondre el multiplicador en factors, aplicar la propietat associativa de la multiplicació i efectuar l'operació. Després compenstar 200 en el sentit correcte, comparant-lo amb el valor obtingut.

En el codi utilitzat per a les categories i subcategories, aquesta estratègia respondria al 11111, perquè s'escull un element (el procés a fer) (V1), es fa un procés adequat d'aproximació de les dades (substitució) (V2), es fa una compensació final en sentit correcte per ajustar el resultat (sumar 300) (V4), s'utilitzen processos addicionals (factorització i comparació) (V6), i s'apliquen propietats de la multiplicació (propietat associativa) (V7).

L'esquema que explica aquesta estratègia quant a la categoria i subcategoria és el següent:



**Esquema 3.** Esquema d'un exemple de formació de categoria i subcategoria



Respecte a les variables V5 i V8 val a dir que en aquesta estratègia els correspondria un valor 0 a cada una, ja que explícitament no es valora la raonabilitat del resultat i no se'n determina l'ordre de magnitud.

**Esquema 4.** Esquema d'una estratègia per exemplificar la categoria i subcategoria anteriors

**Discussió**

Per fer el diagnòstic dels processos d'estimació que empren els alumnes hem valorat quatre aspectes, atenent a:

La classificació prèvia entre estratègies acceptables, no acceptables i acceptables amb resposta incorrecta

Els tipus de tècniques d'estimació que s'han utilitzat

Les variables no lligades al disseny de l'activitat

Les categories en què s'han inclòs les estratègies

a) El tercer estadi d'anàlisi ens ha permès avaluar les estratègies que empren els estudiants a l'hora de resoldre tasques d'estimació en numeració i càlcul. Les estratègies, en una primera classificació, s'han considerat acceptables, acceptables però amb resposta incorrecta, i no acceptables. Sowder (1984) distingeix entre estratègies acceptables i no acceptables, i Lemaire i altres (2000) estudien les variants de les estratègies correctes.

En estimació, no hi ha una única estratègia per arribar a un resultat correcte. Per tant, una estratègia, la considerarem acceptable quan no es

donin errors en el procés, ja siguin conceptuals o de càlcul. En cas contrari, entendrem que és no acceptable, encara que el resultat al qual s'arribi sigui admissible.

Per exemple, si considerem l'ítem següent:

Indica al voltant de quin pes serà la càrrega, en quilograms, que portarà un camió si hi carreguen els paquets següents, que pesen, en quilograms, 753, 648 i 574.

1.600; b) 2.000; c) 2.400; d) 3.000.

Una estratègia acceptable és:

*"He sumat les centenes, 18 més 1,5 de les desenes m'ha donat 19,5 i el que més s'apropa és 2.000"*, que suposa truncar els tres sumands a les centenes (major ordre d'unitat dels nombres donats), operar amb les xifres significatives i afegir, per ajustar el resultat, l'aportació de les desenes calculada com a mitjana aproximada dels nombres formats per les dues darreres xifres dels sumands.

Una estratègia no acceptable és:

*"1.600 perquè miro abans  $5+4+7$  i després  $7+6+5$  i tots dos s'acosten més a 16"*, que implica sumar per separat els dígitos corresponents a les centenes i els corresponents a les desenes i comparar els dos resultats, sense tenir en compte l'efecte que fa la suma de les desenes al resultat de sumar les centenes per obtenir el càlcul final.

Fent el recompte de les estratègies emprades per resoldre les situacions plantejades, tenim:

Estratègies acceptables: 103

Estratègies acceptables i resposta incorrecta: 17

Estratègies no acceptables: 163

Veiem, doncs, que es dona un nombre més gran d'estratègies no acceptables que d'estratègies acceptables, si tenim en compte les respostes per endevinament i les respostes en què no s'ha sabut explicar el procés seguit.

Dels 25 ítems avaluats, només en 3 és més alt el nombre d'estratègies acceptables que el de no acceptables, en 4 és igual, i en les 18 restants, el nombre de no acceptables supera el d'acceptables. Si ens fixem en els percentatges, en 13 ítems la utilització d'estratègies acceptables supera el 50%, i en la resta és inferior.

Podem observar que el percentatge d'utilització d'estratègies no acceptables augmenta en les darreres situacions del test, essent major en



“la raonabilitat en la resolució de problemes”, seguit de la “compensació d’un resultat hipotètic donat”. Les situacions “habilitats associades a processos d’estimació: ordenació, potències de 10” i “addició i subtracció de nombres decimals senzills” són les que presenten menor percentatge d’utilització d’estratègies no acceptables.

Resumim en les taules següents la valoració quantitativa que hem fet per a les estratègies acceptables i no acceptables.

	Nombre d'ítems	Percentatge
El nombre d'estratègies acceptables és inferior al de no acceptables	18	72%
El nombre d'estratègies acceptables és igual al de no acceptables	4	16%
El nombre d'estratègies acceptables és superior al de no acceptables	3	12%

**Taula 2.** Relació percentual entre estratègies acceptables i no acceptable

	Nombre d'ítems	Percentatge
El percentatge d'utilització d'estratègies acceptables és inferior al de no acceptables	12	48%
El percentatge d'utilització d'estratègies acceptables és superior al de no acceptables	13	52%

**Taula 3.** Relació percentual de la utilització d'estratègies acceptables i no acceptables

b) Quant a les estratègies acceptables que són les que valorem en aquest article, veiem que hi ha un grup força nombrós (65) que són emprades per un percentatge d'estudiants inferior al 10%, i només 3 que són utilitzades per més del 50% dels alumnes, la qual cosa significa que la major part de les estratègies acceptables es repeteixen poc perquè són utilitzades per una minoria d'infants.

En la taula següent indiquem els percentatges d'utilització de les diferents estratègies acceptables:

Percentatge d'utilització de les estratègies acceptables	Nombre d'estratègies	Percentatge
Igual o més del 50% de l'alumnat	3	2,91%
Més del 30% i menys del 50% de l'alumnat	4	3,88%
Més del 10% i menys o igual que el 30% de l'alumnat	31	30,10%
Menys o igual que el 10% de l'alumnat	65	63,11%

Taula 4. Percentatges d'utilització de les estratègies acceptables

Les tècniques de càlcul estimatiu més utilitzades són: en primer lloc l'arrodoniment, i en segon lloc el truncament. La substitució és emprada en pocs casos, si tenim en compte que, en estratègies com la resposta "He aproximat 28 a 30 i he dividit mentalment 1.500 entre 30 i m'ha donat 50" a l'ítem: Indica el nombre aproximat de caixes que es poden omplir amb 1.500 ampolles posant-ne 28 a cada caixa, el fet de convertir els nombres en compatibles ve donat per l'arrodoniment òptim d'un dels termes, i per tant la intenció expressa de qui l'aplica pot ser l'arrodoniment, i no la substitució. En aquestes situacions hem considerat que es pot emprar una de les dues tècniques indistintament. Les altres tècniques, com el terme mitjà, el procediment algorísmic i menysprear parts insignificants dels nombres, es fan servir en molt poques ocasions. La translació, com a procediment únic, no s'utilitza mai, i només la trobem en una estratègia, combinada amb l'arrodoniment.

En general, doncs, podem dir que l'arrodoniment i el truncament són, fonamentalment, els dos procediments que els alumnes han aplicat quan han hagut de resoldre una activitat que comporta estimació numèrica.

En la taula següent indiquem els percentatges de cada procés en el conjunt d'estratègies acceptables.

	Procediment de transformació de les dades	Nombres d'estratègies en que s'empra	Percentatge d'utilització
Un sol procés	Arrodoniment	33	32,04%
	Truncament	18	17,48%
	Substitució	7	6,80%
	Terme mitjà	3	2,91%
	Translació	0	0%
	Procediment algorísmic	2	1,94%
	Ignorar parts insignificants	1	0,97%
Es pot considerar l'un o l'altre	Arrodoniment o truncament	5	1,94%
	Truncament o substitució pel quart proper	1	0,97%
	Arrodoniment o substitució nombres manejables	1	0,97%
	Arrodoniment o substitució nombres compatibles	6	5,83%
Es combinen dos processos	Arrodoniment i truncament	3	2,91%
	Arrodoniment i substitució	2	1,94%
	Arrodoniment i translació	1	0,97%
	Arrodoniment i terme mitjà	1	0,97%
	Arrodoniment i ignorar parts insignificants	1	0,97%
	Truncament i terme mitjà	1	0,97%
No s'utilitza cap procediment d'aproximació de les dades		20	19,42%

Taula 5. Percentatges de les diferents tècniques de càlcul estimatiu que apareixen en les estratègies acceptables.

Dos procediments combinats en una sola estratègia només representen el 8,73% del total, i, a més, les estratègies en què s'utilitzen només les fan servir un nombre reduït d'alumnes, ja que no arriben a ser emprades ni pel 10% dels estudiants.

De les estratègies amb percentatge d'utilització més alt, les que inclouen un procés d'aproximació de les dades, la més emprada sempre és l'arrodoniment.

Cal destacar, també, que les set estratègies que comporten substitució com a únic procés d'aproximació de les dades per efectuar el càlcul, són emprades per menys del 10% de l'alumnat i quatre només les fa servir un sol estudiant.

c) Avaluem ara l'ús de les variables V3, V4, V5, V6, V7 i V8.

Respecte a la variable 3 constatem que l'estudiant tendeix a treballar amb tots els dígit dels nombres i no a fer una reducció a primers dígit, sense tenir en compte la resta de xifres, i després tornar a compondre el resultat per donar-lo amb l'ordre de magnitud apropiat. En un 67% de les estratègies es manté el nombre de dígit dels nombres originals, i en la resta es redueixen els dígit per operar amb més facilitat; però cal tenir en compte que en un 20,39% de les estratègies en què es fa aquesta simplificació es treballa amb nombres decimals i que, per tant, tota aproximació a la part entera o a les dècimes suposarà una reducció de xifres, ja que els alumnes no procedeixen a substituir per zeros les xifres de la part decimal menystinguda.

Un exemple de reducció a primers dígit el podem observar en la resposta *"He sumat 14 + 88 i m'ha donat 102 més l'altra xifra donarà 4 xifres"*, quan a l'alumne se li demana que indiqui, sense fer l'operació, el nombre de xifres del resultat de sumar 144+889.

La variable 4 fa referència als processos de compensació que hem observat en les estratègies que empen els alumnes. La compensació final s'efectua en el 25,24% de les estratègies, i la intermèdia en un 3,88%. Per tant, la reflexió sobre les dades i el tipus de càlcul es dona més quan s'ha d'ajustar el resultat, però difícilment es té en compte durant el procés per ajustar les dades abans d'efectuar el càlcul. Tanmateix constatem que, majoritàriament, l'alumne fa un procediment d'aproximació de les dades i després el càlcul, sense aturar-se, moltes vegades, a valo-

rar si la transformació dels nombres i el tipus d'operació afecten el resultat excessivament, de manera que es produeixi massa error. Cal tenir en compte que alguns dels procediments de compensació final inclosos en el 25,24% esmentat vénen obligats per la pròpia activitat, que demana, explícitament, l'ajustament d'un resultat hipotètic d'una operació donada.

Un exemple de la utilització de processos de compensació el trobem quan per ajustar el càlcul donat  $1.895 + 2.114 + 500 \approx 4.200$  de manera que s'apropi més a l'exacte, un infant fa: "Li he restat 100 a 2.114 i li he sumat a 1.895. He sumat  $2.000+2.000+500$  i m'ha donat 4.500 i per aproximar li sumaria 300".

Aquesta estratègia comporta un procés de compensació intermèdia quan apropa els dos primers sumands a 2.000 i un de compensació final, quan diu que ha de sumar 300 al resultat donat 4.200.

Pel que fa a la variable 5 veiem que es valora la raonabilitat del resultat en un 29,13% de les estratègies observades, però val a dir que aquesta valoració va implícita en la mateixa activitat quan es tracta d'estudiar sobre la realitat física, sobre la resolució de problemes o sobre la determinació de l'ordre de magnitud del resultat derivat d'un càlcul. Només en poques ocasions l'alumne reflexiona sobre la validesa del resultat al qual arriba.

Referent a la variable 6 observem que les propietats de les operacions s'apliquen correctament en un 23,30% de les estratègies, seguint els percentatges següents:

Propietats de les operacions	Percentatges d'utilització
Distributivitat	2,91%
Associativitat	5,83%
Invariància de la diferència o de la raó	7,77%
Inversió addició-substracció	1,94%
Inversió multiplicació-divisió	5,83%

Taula 6. Percentatges d'utilització de les propietats de les operacions que apareixen en les estratègies elaborades pels infants.

Un exemple d'aplicació de la propietat distributiva de la multiplicació respecte de la suma és el següent:

A l'ítem del test que demana calcular aproximadament quantes ampolles es poden posar en 132 caixes de 48 ampolles cadascuna, amb quatre opcions de resposta a) 1.200; b) 4.500; c) 5.500 ; d) 6.000, un alumne va respondre: "He multiplicat  $50 \times 100$  i m'ha donat 5.000 després he multiplicat  $50 \times 30$  i m'ha donat 1.500, ho he sumat i m'ha donat 6.500 i he posat 6.000 arrodonint-ho".

Taula 7.

	Procés addicional	Nombre d'estratègies en que es fa servir	Percentatge d'utilització	
S'utilitza un sol procés	Comparació	36	34,95%	
	Ordenació	1	0,97%	
	Tempteig	3	2,91%	
	Descomposicions	Additiva	5	4,85%
		Subtractiva	2	1,94%
		Factorial	1	0,97%
Fitament	2	1,94%		
S'utilitza més d'un procés	Proporcionalitat	2 (1 directa i 1 inversa)	1,94%	
	Comparació i ordenació	6	5,83%	
	Comparació, ordenació i tempteig	2	1,94%	
	Comparació i factorització	2	1,94%	
	Comparació i descomposició additiva	4	3,88%	
	Comparació i fitament	2	1,94%	
	Comparació i p. directa	1	0,97%	
	Comparació i tempteig	1	0,97%	

Respecte a la variable 7 veiem que el procés que més es dona és el de comparació, d'altra banda potser el més lligat a processos d'estimació; i altres, com les descomposicions numèriques, molt útils per al càlcul mental, s'efectuen poc, tal vegada perquè en poder fer aproximacions de les dades alguns càlculs es tornen relativament senzills i no les fa necessàries. En el càlcul mental exacte són imprescindibles, fonamentalment per al càlcul multiplicatiu, perquè en aquest cas no es poden simplificar les dades convertint-les en altres de més manejables. La utilització d'aquests processos es recull quantitativament en la taula següent:

**Taula 7.** Percentatges d'utilització de processos addicionals que apareixen en les estratègies elaborades pels infants.

Una de les respostes dels infants al mateix ítem que hem posat d'exemple per a la variable 6, ens serveix per il·lustrar la utilització de processos addicionals, en aquest cas, la descomposició factorial.

*"Arrodonint 48 a 50, és més fàcil perquè multipliques per 5 i afegeixes un 0 de multiplicar per 10".*

Pel que fa a la variable 8, el valor de posició dels diferents dígitos dintre d'un nombre s'ha de tenir en compte en un 30,10% del total d'estratègies, i la mida relativa per a determinar l'ordre de magnitud dels nombres, en un 31,07%. També cal dir que el coneixement d'aquests conceptes és imprescindible per fer estimacions en tots els casos, però només l'hem considerat quan l'activitat proposada requeria expressament determinar-los per poder obtenir una resposta acceptable.

A l'ítem que demana explícitament arrodonir a les desenes el nombre 12,73, un alumne va expressar aquest raonament: *"És 10 perquè ho he fet mirant les unitats i quantes n'hi havia. Si n'hi ha menys de 5 poso tot l'altre zero i deixo les mateixes desenes"*.

Val a dir que aquest ítem va produir un nombre important d'estratègies no acceptables degudes a la confusió entre desenes i unitats o entre desenes i dècimes i que, en general, la determinació del valor de posició de les xifres d'un nombre encara és la causa de molts errors en els processos d'aproximació.

d) L'observació de les diferents categories i les corresponents subcategories ens ratifica el que hem analitzat anteriorment per a les variables, però ens hi afegeix més elements, ja que en podem estudiar les diverses combinacions.

En la taula següent indiquem quins són els models de les categories i les subcategories i els percentatges d'utilització de cadascun.

Número d'ordre de la categoria	Model de la categoria V1 V2 V4	Percentatge d'utilització del model	Model de la subcategoria V1 V2 V4 V6 V7	Percentatge d'utilització del model
Primera	2 1 0	46,15%	2 1 0 0 0	16,48%
			2 1 0 0 1	14,29%
			2 1 0 1 1	10,99%
			2 1 0 1 0	4,40%
Segona	1 1 1	16,48%	1 1 1 0 1	13,19%
			1 1 1 1 1	3,30%
Tercera	2 0 0	13,19%	2 0 0 0 1	7,69%
			2 0 0 1 1	3,30%
			2 0 0 1 0	2,20%
Quarta	2 1 1	12,09%	2 1 1 0 1	8,79%
			2 1 1 0 0	2,20%
			2 1 1 1 0	1,10%
Cinquena	2 2 0	7,69%	2 2 0 0 0	6,59%
			2 2 0 0 1	1,10%
Sisena	1 0 1	2,20%	1 0 1 0 1	1,10%
			1 0 1 1 1	1,10%
Setena	2 2 1	1,10%	----	----
Vuitena	1 0 0	1,10%	----	----

**Taula 8.** Models de categories i subcategories per a les estratègies acceptables i percentatges d'utilització.



Veiem que, en conjunt, gairebé un 50% de les estratègies emprades segueixen un model on cal escollir dos elements abans d'aplicar algun procés de transformació de les dades, i que quan s'efectua aquest procés només s'utilitza una tècnica determinada i no es fa compensació del resultat. També, si mirem la combinació de les cinc variables que configuren les subcategories, aquesta estructura d'un sol procediment i no compensació, juntament amb la no utilització de propietats de les operacions i de processos addicionals, manté el lloc prioritari entre les subcategories d'aquesta primera categoria majoritària.

Dintre de les subcategories, les que comporten la utilització de processos addicionals es presenten en major percentatge que les que, en el procés, fan servir propietats de les operacions.

Les categories en què s'utilitzen simultàniament dos procediments diferents d'aproximació de les dades ocupen un lloc inferior en l'ordenació, quant a la magnitud del percentatge; i si a més a més hi afegim que es produeixi compensació, ens trobem davant d'un únic cas.

## Conclusions

De l'anàlisi de les estratègies emprades pels infants, observem que els bons resolutors adequen el procediment a l'operació i, fonamentalment, a les dades, resultat que és consistent amb els de Levine (1982), R. E. Reys i altres (1982), LeFevre i altres (1993), Dowker (1997) i Hanson i Hogan (2000), que troben en els seus estudis que els infants utilitzen diverses estratègies quan fan càlcul estimatiu, i que aquestes estratègies sovint no les fan servir de la mateixa manera. Aquesta afirmació també connecta amb la recerca de Lemaire i altres (2000) quan expliquen que els infants adapten les estratègies a utilitzar al problema plantejat i que de cada estratègia usen variants que no fan servir sempre igual, i suggereixen que l'estimació en càlcul és un domini específic de la cognició matemàtica, amb les estratègies que li són pròpies i les variables que afecten l'ús de les estratègies.

Ara bé, aquests bons resolutors són una minoria i, en general, podem veure que els alumnes mostren poca flexibilitat en les estratègies d'estimació que utilitzen, com deia Goodman (1991), i en fer una estratègia d'estimació en càlcul no segueixen el procediment que consisteix a escollir l'operació, si cal fer-la, transformar les dades valorant la tècnica o les tècniques més adients per a fer-ho, calcular correctament, va-

lorar la precisió del càlcul, ajustar el resultat si és necessari i valorar-ne la raonabilitat. Ens trobem davant de l'aplicació gairebé monolítica d'una sola tècnica d'aproximació, que és generalment l'arrodoniment i on, normalment, no es valora el resultat ni es compensa per fer-lo més precís atenent a la qüestió plantejada. Observem una tendència a efectuar una operació i donar per acabat el procés quan ja s'obté una solució numèrica. Això pot ser degut a falta de costum de reflexionar sobre els mateixos procediments i a no interrogar-se davant d'un resultat donat o propi si, explícitament, no es demana que així es faci.

A més aquesta utilització uniforme d'estratègies úniques produeix en alguns casos estratègies acceptables, però una bona part de les no acceptables se'n deriva, ja que una determinada estratègia pot ser vàlida en algunes situacions però no en totes. En càlcul estimatiu, exercicis similars poden requerir estratègies diferents. Per exemple, trobar el nombre de xifres del quocient  $3.570 : 20$  pot promoure l'ús d'estratègies diferents al mateix requeriment formulat per a l'operació  $3.470 : 35$ , perquè les condicions d'ambdues divisions són diferents malgrat l'aparent similitud, atès el nombre de dígitos del dividend i del divisor i la dimensió numèrica.

Per això, en l'estimació en numeració i càlcul –on no hi ha un camí prefixat per arribar a un resultat, i on aquest resultat, per ser raonablement bo, no ha de ser únic, sinó que es permet tot un ventall de respostes dintre d'un interval– és imprescindible que l'estudiant desenvolupi estratègies pròpies de resolució i que comparteixi les que aplica amb les que han emprat els companys, per aconseguir-ne un conjunt més ampli. La reflexió compartida de processos expressats verbalment ajudarà els estudiants a veure els bons camins trobats pels altres i a augmentar el coneixement d'estratègies d'estimació. Ara bé, les estratègies no sorgeixen per si soles. Si esperem només les que l'infant pugui desenvolupar intuïtivament, és quan ens podem trobar amb una utilització indiscriminada d'una estratègia única que s'aplica a diferents situacions sense valorar-ne l'adequació. És per això que, per generar estratègies pròpies i tenir criteri per decidir quina és la més adient en cada cas, cal que prèviament s'hagin ensenyat estratègies a l'aula. I per ensenyar estratègies cal presentar situacions variades amb activitats que, malgrat ser semblants, suposin diferents condicions de realització (Moneo i Castelló, 1997), de manera que provoquin que els alumnes en vegin els aspectes rellevants, els diferenciadors que les distingeixin d'altres estratègies i puguin arribar a treure'n patrons.

Els elements que cal tenir en compte per al desenvolupament de la capacitat estimativa de l'infant en l'àmbit de la numeració i el càlcul, vénen a ser conclusions que hem anat constatant al llarg del nostre treball. Algunes d'aquestes conclusions, que creiem que és important considerar-les per a la confecció de propostes didàctiques, les indiquem a continuació, sense establir-hi cap prioritat.

La capacitat d'estimació en numeració i càlcul ve determinada per saber fer conjectures, amb una formació prèvia. I fer conjectures proporcionarà una nova formació, que repercutirà en la millor realització dels processos que s'emprin per fer més conjectures. Per això hem dit que l'estimació és un procés educable.

En la pràctica escolar, l'estimació encara és considerada un contingut menor i s'hi dedica poc temps d'aprenentatge. Es potencia poc la capacitat i millora del domini estimatiu. Cal donar-li més rellevància, sobretot com a eina formativa i per la utilitat que té.

El domini de procediments i recursos de càlcul mental ajuda la millora estimativa. Però en estimar s'empren procediments específics diferents dels utilitzats per obtenir resultats exactes. Alguns d'aquests procediments poden sorgir de manera espontània amb el treball general del càlcul, i cal tenir-los en compte.

Les activitats d'estimació, quan sigui possible i sense forçar situacions artificioses, han d'integrar-se en la realitat, sorgint de situacions problemàtiques que les facin necessàries.

L'estimació forma part de la resolució de problemes, ja que és convenient que l'estudiant intueixi el resultat del problema fent-ne una estimació prèvia a la resolució. D'aquesta manera, el problema no es convertirà en l'exercici mecànic d'aplicar un seguit d'operacions. En aquest sentit, l'estimació en facilita la comprensió. D'altra banda, la revisió del resultat, valorant si és o no és raonable, crearà l'hàbit de verificar la resposta donada.

Les activitats d'estimació s'han de presentar des de plantejaments diferents i variats, de manera que s'impel·leixi l'ús de multiplicitat de tècniques i d'estratègies.

És necessari proposar als infants situacions diverses en què hagin de decidir si l'estimació és o no és el millor procés a emprar.

Els infants han de comprendre el llenguatge de l'estimació. Aquest llenguatge no és precís, sinó que té un cert grau d'indeterminació. Per això el resultat d'una estimació no és únic; no hi ha una sola solució correcta, sinó un ventall de solucions acceptables a les quals es pot arribar per diversos camins. Tanmateix, les tècniques i des-

treses específiques de l'estimació en numeració i càlcul delimiten i controlen aquesta aparent imprecisió.

Una estimació sempre porta implícit un error. Cal que els alumnes sàpiguen copsar la magnitud d'aquest error i valorar el grau de precisió que és necessari atenent a cada context.

La comunicació dels procediments i de les estratègies emprats pels alumnes –posant en comú diferents tècniques, els motius que han portat a escollir-ne unes de concretes, i valorant conjuntament els resultats obtinguts–, contribuirà a fer-los comprendre millor la validesa i significativitat de l'estimació. Així, els alumnes gaudiran d'un repertori més ampli d'estratègies per poder triar en cada moment la més adient.

L'estimació millora el sentit numèric, és a dir, l'ús efectiu i intel·ligent dels nombres. Tenir sentit numèric farà que l'infant sigui competent numèricament, i l'estimació hi juga un paper important. Per això caldrà que l'estudiant ajusti i perfeccioni estimacions fetes, valori la raonabilitat de resultats donats i detecti errors en la manipulació dels nombres. A l'aula, cal estimular la descoberta. Per aquest motiu cal crear situacions no tancades ni acabades, on l'infant pugui desenvolupar les pròpies estratègies resolutòries, entenent per estratègia tot un procés, i no només l'aplicació de tècniques. Cal que l'alumne conegui les tècniques, però no s'ha de caure en l'error de convertir-les en automatismes mecànics, com es fa de vegades quan s'ensenya l'arrodoniment. I, evidentment, no s'ha de reduir l'aprenentatge de l'estimació en numeració i càlcul a l'execució de tècniques d'aproximació.

És, doncs, imprescindible treballar de forma sistemàtica l'habilitat per calcular estimativament, ja que aquesta destresa, a més d'agilitat, de precisió i de més velocitat calculatòria, desenvolupa en els infants capacitats d'atenció i concentració, que també són importants.

### Referències

- Alsina, A. (2002). De los contenidos a las competencias numéricas en la enseñanza obligatoria. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 29, 55-66.
- Alsina, C., Burgués, C., Fortuna, J. M., Jiménez, J., Torra, M. (1998). *Enseñar matemáticas*. Barcelona: Graó.
- Arnau, J., Anquera, M.T., Gómez, J. (1990). *Metodología de la investigación en ciencias del comportamiento*. Murcia: Universidad de Murcia.

- Berry, R. Q. (1999). Computational estimation skills of eighth-grade students. (Master's thesis, Christopher Newport University, 1998). *Masters Abstracts International*, 37/01, 41. (DA1391427).
- Brame, O. H. (1986). Computational estimation strategies used by high school students of limited computational estimation ability. (Doctoral dissertation, North Texas State University, 1986). *Dissertation Abstracts International*, 47A, 1228. (DA8616027).
- Callís, J. (2002). *Estimació de mesures longitudinals rectilínies i curvilínies. Procediments, recursos i estratègies*. Tesis doctoral. Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals. Universitat Autònoma de Barcelona.
- De Castro, C., Castro, E., Segovia, I. (2002). Un modelo alternativo para la descripción de estrategias de estimación. *Indivisa. Boletín de estudios e investigación*, 3, 159-165.
- Dowker, A. (1992). Computational estimation strategies of professional mathematicians. *Journal for Research in Mathematics Education*, 23 (1), 45-55.
- Dowker, A. (1997). Young children's addition estimates. *Mathematical Cognition*, 2 (2), 113-135.
- Forrester, M. A. (1990). Exploring Estimation in Young Primary School Children. Educational Psychology. *An International Journal of Experimental Educational Psychology*, 10 (4), 283-300.
- Goñi, J.M. (Coord.) (2000). *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI*. Barcelona: Graó.
- Goodman, T. (1991). Computational estimation skills of pre-service elementary teachers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 22, 259-272.
- Hanson, S. A., Hogan, T. P. (2000). Computational Estimation Skill of College Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (4), 483-499.
- Howden, H. (1989). Teaching number sense. *Arithmetic Teacher*, 36 (6), 6-11.
- LeFevre, J., Greenham, S. L., Waheed, N. (1993). The development of procedural and conceptual knowledge in computational estimation. *Cognition and Instruction*, 11(2), 95-132.
- Lemaire, P., Lecacheur, M., Farioli, F. (2000). Children's Strategy Use in Computational Estimation. *Canadian Journal of Experimental Psychology*, 54 (2), 141-148.
- Lemaire, P., Lecacheur, M. (2002). Children's Strategies in Computational Estimation. *Journal of Experimental Child Psychology*, 80 (4), 281-304.

- Levine, D. (1982). Strategy use and Estimation ability of College Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13 (5), 350-359.
- Llinares, S. (2001). El sentido numérico y la representación de los números naturales. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria*, (pp. 151-176). Madrid: Síntesis.
- Monereo, C., Castelló, M. (1997). *Las estrategias de aprendizaje. Cómo incorporarlas a la práctica educativa*. Barcelona: Edebé.
- Reys, B. J. (1994). Promoting number sense in middle grades. *Teaching Mathematics in the Middle School*, 1, 114-120.
- Reys, R. E., Bestgen, B. J., Rybolt, J. F., Wyatt, J. W. (1980). *Identification and characterization of computational estimation processes used by in-school pupils and out-of-school adults*. Washington, DC: National Institute of Education.
- Reys, R. E., Bestgen, B. J., Rybolt, J. F., Wyatt, J. W. (1982). Processes used by good computational estimators. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12 (3), 183-201.
- Reys, R. E., Reys, B. J., Nohda, N., Ishida, J. (1991). Computational estimation performance and strategies used by fifth and eighth grade Japanese students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22 (1), 39-58.
- Rubenstein, R. N. (1985). Computational estimation and related mathematical skills. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16 (2), 106-119.
- Segovia, I. (1986). *Estimación y cálculo aproximado en EGB*. Memoria de licenciatura, Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada: Universidad de Granada.
- Sowder, J. T. (1984). Computational Estimation Procedures of School Children. *Journal of Educational Research*, 77 (6), 332-336.
- Sowder, J. T. (1994). Cognitive and metacognitive processes in mental computation and computational estimation. En R. E. Reys, N. Nohda (Ed.), *Computational alternatives for the twenty-first century. Cross-cultural perspectives from Japan and the United States*, (pp. 139-146). Reston, VA: NCTM.
- Sowder, J. T., Wheeler, M. M. (1989). The development of concepts and strategies used in computational estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (2), 130-146.
- Wyatt, J.W. (1986). *A case-study survey of computational estimation processes and notions of reasonableness among ninth grades students*. Doctoral dissertation